DIMANAKAH ALLAH?
(Dalam tinjauan secara matematis)

Oleh : Fajar Adi Kusumo
Tanggal : 18 Oktober 1997

"Dan apabila hamba-hamba-Ku bertanya kepadamu tentang Aku, maka (jawablah), bahwasanya Aku adalah dekat. Aku mengabulkan permohonan orang yang berdoa apabila ia memohon kepada-Ku, maka hendaklah mereka itu memenuhi (segala perintah)-Ku dan hendaklah mereka beriman kepada-Ku, agar mereka selalu berada dalam kebenaran." (QS. Al Baqarah (2) : 186)

Dalam ayat di atas Allah menyatakan bahwa Dia dekat dengan hamba-Nya. Seberapa dekatkah kita sebagai hamba Allah dengan-Nya ? Kadangkala timbul pertanyaan di dalam diri kita tentang kedekatan Allah kepada hamba-Nya, seperti misalnya, Allah dekat kepada hamba-Nya katakan si A, tetapi Allah juga dekat dengan hamba-Nya yang lain, katakan si B, disamping itu Allah juga dekat dengan C, D, E, dan lainnya, padahal pada saat yang bersamaan antara A, B, C, D, E dan lainnya berada pada tempat yang saling berjauhan menurut ukuran manusia. Lalu bagaimanakah hal itu bisa terjadi ?

Seringkali jawaban yang kita peroleh adalah, "Sudut pandang Allah jangan disamakan dengan makhluk-Nya", atau ada juga yang menjawab, "Itu sudah terdapat di dalam Al Qur'an, kita tidak perlu tahu bagaimana itu terjadi tetapi kita harus meyakininya". Jawaban-jawaban itu tidak salah, tetapi seringkali kita merasa balum puas bila belum membuktikan hal itu secara 'ilmiah'. Ilmiah dalam ukuran logika manusia. Nah pada kesempatan ini kita akan mencoba untuk sedikit bermain logika dengan menggunakan beberapa pengertian matematika guna mengkaji hal tersebut.

Sebelum melangkah lebih lanjut, kita perlu terlebih dulu mengenal beberapa pengertian dalam matematika, seperti ruang vektor, sub ruang, kombinasi linear, bebas linear, basis dan dimensi. Disamping itu untuk melakukan pembuktian perlu juga kiranya pemahaman tentang induksi matematika dan metrik (jarak).

Definisi 1 *Himpunan V disebut ruang vektor atas field F jika memenuhi :*

1. $(V, \oplus)$ *group komutatif terhadap penjumlahan vektor.*
2. $(F, +, \bullet)$ *merupakan suatu field.*
3. *Untuk setiap* $\alpha, \beta \in F$ *dan untuk setiap* $v_1, v_2 \in V$ *maka* $\alpha \bullet v_1 \in V$ *dan berlaku*
   (a) $(\alpha + \beta) \bullet v_1 = (\alpha \bullet v_1) \oplus (\beta \bullet v_1)$
   (b) $\alpha \bullet (v_1 \oplus v_2) = (\alpha \bullet v_1) \oplus (\alpha \bullet v_2)$
   (c) $(\alpha\beta) \bullet v_1 = \alpha(\beta \bullet v_1)$
   (d) $1 \bullet v_1 = v_1$

Definisi 2 *Diberikan V suatu ruang vektor atas field F. $S \subseteq V$ merupakan sub ruang dari V jika S juga merupakan ruang vektor atas field F.*

Definisi 3 *Diberikan V ruang vektor atas field F. Misalkan A himpunan vektor-vektor. Himpunan $[A]$ yaitu himpunan semua kombinasi linear vektor-vektor di A adalah koleksi semua jumlahan berhingga dari bentuk :* $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$ *dimana* $\alpha_i \in F$ *dan* $v_i \in A$ $i = 1, 2, ..., n$.

Teorema 1 *Jika V ruang vektor atas field F dan $A \subseteq V$, $A \neq \emptyset$, maka $[A]$ subruang V.*

Definisi 4 *Himpunan semua kombinasi linear dari sebarang himpunan vektor-vektor yang tidak kosong dari V adalah suatu ruang bagian dari V.*

Definisi 5 *Himpunan* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *disebut bebas linear jika persamaan* $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0$ *berakibat* $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$

Teorema 2 *Jika* S *himpunan bebas linear dan* $A \subseteq S$ *maka* A *bebas linear.*

Definisi 6 *Himpunan bebas linear maksimal dari* V *disebut basis dari* V*.*

Teorema 3 *Diketahui :* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *suatu basis dari* V*. Jika* $v \in V$ *maka* v *dapat dinyatakan secara tunggal dari kombinasi linear* $v_1, v_2, ..., v_n$*.*

Teorema 4 *Himpunan* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *basis* V *jika dan hanya jika*

1. $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *bebas linear*
2. $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *membangun* V

Teorema 5 *(Teorema Grassman-Steinitz) Misal vektor-vektor* $x_1, x_2, ..., x_s$ *merupakan vektor-vektor yang bebas linear dalam ruang vektor* V*. Jika* $y_1, y_2, ..., y_r$ *merupakan pembangun* V*, maka terdapat vektor-vektor* $y_i, i = 1, 2, ..., r$ *yang apabila perlu dengan menukar indeks berlaku* $y_1 = x_1, y_2 = x_2, ..., y_s = x_s$*, sehingga vektor-vektor* $x_1, x_2, ..., x_s, y_{s+1}, y_{s+2}, ..., y_r$ *juga merupakan pembangun dari ruang vektor* V*.*

Akibat 1 *Suatu sistem generator yang memuat* n *(maksimal) vektor bebas linear tak mungkin membangun ruang vektor dengan dimensi lebih besar dari* n*.*

Definisi 7 *Misal* V *suatu ruang vektor atas field* F *dan berdimensi hingga. Banyaknya vektor dalam basis* V *disebut dimensi dari* V *dan dinotasikan :* $dim(V)$*.*

Teorema 6 *Misal* V *ruang vektor berdimensi* n*. Sebarang himpunan vektor yang bebas linear di* V *dapat diperluas menjadi basis di dalam rung vektor* V*.*

Dari pengertian-pengertian diatas kita dapat mengambil suatu hubungan (keterkaitan) antara pengertian yang satu dengan pengertian yang lain sebagai berikut :

Setiap komponen yang terdapat di alam semesta ini tersusun atas vektor-vektor dan skalar-skalar yang membentuk suatu ruang vektor, namakan V, atas suatu field, namakan F. Vektor-vektor dan skalar-skalar yang terdapat di dalam ruang vektor ini akan membentuk suatu kombinasi linear. Dari kombinasi linear ini dapat diketahui apakah vektor-vektor tersebut merupakan vektor-vektor yang bebas linear atau bergantung linear. Apabila himpunan vektor-vektor yang bebas linear itu ditambah satu vektor lagi menjadi bergantung linear maka himpunan vektor-vektor itu dikatakan bebas linear maksimal atau merupakan basis dari ruang vektor V atas field F. Banyaknya vektor yang membangun suatu basis disebut dengan dimensi. Dari Teorema (6) dikatakan bahwa vektor-vektor yang bebas linear dari suatu ruang vektor dapat diperluas menjadi suatu basis dari ruang vektor tersebut.

Misalkan V_1 suatu ruang vektor atas field F yang berdimensi satu ($dim(V_1) = 1$), maka V_1 hanya tersusun oleh satu vektor yang merupakan vektor basis, namakan v_1, ditulis $\{v_1\}$ basis V_1. Misal V_2 ruang vektor berdimensi dua atas field F yang memuat V_1, dengan $\{v_1, v_2\}$ merupakan basis V_2. Dari Definisi (2) jelas bahwa V_1 merupakan sub ruang dari V_2 dan basis dari V_1 dapat diperluas menjadi basis di dalam V_2 (Teorema (6)). Dengan kata lain, ruang vektor berdimensi satu akan termuat di dalam suatu ruang vektor berdimensi dua. Ambil sebarang ruang vektor berdimensi tiga atas field F yang memuat V_2, namakan V_3, dengan $\{v_1, v_2, v_3\}$ basis V_3. Jelas bahwa V_2 merupakan sub ruang dari V_3 dan basis dari V_2 dapat diperluas menjadi basis dalam V_3. Dengan kata lain V_2 termuat dalam V_3, jelas bahwa V_1 juga termuat dalam V_3. Dengan menggunakan induksi matematika, hal itu berlaku untuk ruang vektor berdimensi k yaitu V_k atas field F, $k = 1, 2, 3$ maka pasti berlaku untuk $k = n$. Akan ditunjukkan hal itu berlaku untuk $k = n + 1$. Untuk $k = n$ maka $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ basis V_n. Ambil sebarang ruang vektor berdimensi $n + 1$ atas field F yang memuat V_n, namakan V_{n+1}, maka terdapat vektor v_{n+1}

sehingga $\{v_1, v_2, ..., v_n, v_{n+1}\}$ merupakan basis dari V_{n+1}. Dari Definisi (2) jelas bahwa V_n sub ruang dari V_{n+1}. Karena V_n mempunyai n vektor basis yaitu $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, maka $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ bebas linear sehingga V_n dapat diperluas menjadi basis V_{n+1}. Dengan demikian terbukti V_1 termuat di dalam V_2. V_2 termuat di dalam V_3, V_3 termuat di dalam V_4, dan seterusnya sehingga V_{n-1} termuat di dalam V_n. Dan telah dibuktikan V_n termuat di dalam V_{n+1}. Berdasar induksi matematika, hal itu berlaku untuk setiap $V_k, k = 1, 2, 3, ..., n-1, n, n+1, n+2, ...$ Atau dengan kata lain $V_1 \subseteq V_2 \subseteq V_3 \subseteq ... \subseteq V_{n-1} \subseteq V_n \subseteq V_{n+1} \subseteq ....$

Didefinisikan $\rho(V_i, V_j)$ adalah jarak V_i dan V_j, $i \leq j$. Misalkan diambil ruang vektor berdimensi satu atas field F di atas yaitu V_1, karena $V_1 \subseteq V_2$ maka $\rho(V_1, V_2) = 0$. Demikian pula $V_2 \subseteq V_3$ maka $\rho(V_2, V_3) = 0$, dan seterusnya sehingga untuk $V_{n-1} \subseteq V_n$ berakibat $\rho(V_{n-1}, V_n) = 0$, dan untuk $V_n \subseteq V_{n+1}$ maka $\rho(V_n, V_{n+1}) = 0$, dan seterusnya. Sehingga dapat dikatakan untuk setiap ruang vektor V_i dan V_j atas field F dengan $i \leq j$ dan $V_i \subseteq V_j$ berlaku $\rho(V_i, V_j) = 0$. Dengan demikian terbukti apabila suatu ruang vektor berdimensi i termuat di dalam ruang vektor berdimensi j maka jarak antara V_i dan V_j adalah sama dengan nol.

Dari uraian diatas marilah kita kaji lebih lanjut pernyataan Allah dalam QS Al Baqarah (2) : 186 di atas,*"Aku adalah dekat"*. Dari sekian banyak sifat Allah dua diantaranya adalah *Al Kabiir (Maha Besar)* dan *Al Azhiim (Maha Agung)*. Karena Allah bersifat "Maha" maka kebesaran dan keagungan-Nya adalah lebih dari segala yang ada pada ciptaan-Nya. Demikian pula halnya dengan dimensi Allah, Allah menempati dan menguasai suatu ruang vektor dengan dimensi yang Maha Besar pula. Sehingga dapat dikatakan Allah menempati dan menguasai suatu Maha ruang vektor, dimana seluruh ruang vektor yang ada di alam semesta ini termuat di dalam Maha ruang vektor tersebut. Atau dengan kata lain setiap ruang vektor dari ciptaan Allah, berapapun besar dimensinya akan selalu termuat di dalam Maha ruang vektor Allah. Sehingga jarak antara ciptaan Allah yang merupakan komponen dari suatu ruang vektor, katakan berdimensi n dengan Allah adalah sama dengan nol. Oleh sebab itu maka Allah menyatakan bahwa Allah adalah dekat. Hal ini dikuatkan oleh firman Allah yang lain di dalam Al Qur'an: *"Dan sesungguhnya Kami telah menciptakan manusia dan mengetahui apa yang dibisikkan oleh hatinya, dan Kami lebih dekat kepadanya daripada urat lehernya" (QS. Qaaf (50) : 16)*

Referensi

[1] Al Qur'anul Kariim

[2] H.L. ROYDEN (Stanford University), REAL ANALYSIS (third edition), Macmillan Publishing Company, New York, Collier Macmillan Publishing, London, 1988

[3] SETIADJI, ALJABAR LINIER (Diktat Kuliah), Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta, 1983